ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
– – – – – – – – – – –

NGUYỄN QUỐC DŨNG

VỀ BẤT ĐẲNG THỨC ERDOS-MORDELL

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN QUỐC DŨNG

VỀ BẤT ĐẲNG THỨC ERDOS-MORDELL

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS.TS. HÀ TRẦN PHƯƠNG

Thái Nguyên - 2017

Mục lục

Lời cảm ơn

Trước tiên tôi xin được gửi lời cảm ơn đến tất cả quý Thầy Cô đã giảng dạy trong chương trình Cao học Toán khóa 9 - Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, những người đã truyền đạt kiến thức hữu ích về ngành Phương pháp Toán sơ cấp làm cơ sở cho tôi hoàn thành luận văn này.

Đặc biệt tôi xin chân thành cảm ơn Thầy giáo PGS.TS. Hà Trần Phương. Thầy đã dành nhiều thời gian quý báu tận tình hướng dẫn tôi trong suốt quá trình thực hiện luận văn, đồng thời còn là người giúp tôi lĩnh hội được kiến thức chuyên môn và rèn luyện cho tôi tác phong nghiên cứu khoa học.

Qua đây, tôi cũng xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình, bạn bè thân thiết là những người luôn sát cánh bên tôi, tạo mọi điều kiện tốt nhất cho tôi, đã nhiệt tình giúp đỡ, chia sẻ, động viên tôi trong suốt quá trình học tập, cũng như khi tôi thực hiện và hoàn thành luận văn này.

Mặc dù đã rất cố gắng song luận văn không tránh khỏi có những thiếu sót. Rất mong nhận được ý kiến đóng góp của các Thầy giáo, Cô giáo và các anh chị học viên để luận văn hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, ngày ... tháng ... năm 2017

Tác giả luận văn

Nguyễn Quốc Dũng

Mở đầu

Bất đẳng thức Erdos-Mordell được nhà toán học Paul Erdos đề xuất năm 1935 và lời giải đầu tiên được đưa ra bởi Louis Mordell sử dụng Định lý hàm số Cosin. Bất đẳng thức này cho thấy quan hệ giữa khoảng cách từ một điểm tùy ý nằm trong tam giác tới các cạnh và các đỉnh. Cụ thể với tam giác ABC và P là điểm nằm trong tam giác, kí hiệu R_1, R_2, R_3 lần lượt là khoảng cách từ P đến các đỉnh A, B, C và r_1, r_2, r_3 lần lượt là khoảng cách từ P đến các cạnh BC, CA, AB. Khi đó ta có bất đẳng thức

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 2\big(r_1 + r_2 + r_3\big).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều và P là trọng tâm của nó. Kể từ khi ra đời bất đẳng thức Erdos-Mordell đã thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều tác giả trong, ngoài nước và có nhiều ứng dụng trong việc giải quyết các bài toán thi học sinh giỏi, đặc biệt trong lĩnh vực hình học sơ cấp. Thời gian gần đây có nhiều tác giả đã nghiên cứu thêm một số chứng minh mới cho bất đẳng thức Erdos-Mordell và nghiên cứu các mở rộng của bất đẳng thức này. Có thể kể đến các công trình của Y. D Wu, C. L Yu và Z-H Zhang [9], R. B. Manfrino, J. A. G. Ortega và R. V. Delgado [7], D.S Mitrinovic, J.E. Pecaric and V.Volene [8]. W. D. Jiang và J. Liu,....

Mục đích của đề tài là tổng hợp lại một số vấn đề về bất đẳng thức Erdos-Mordell và ứng dụng trong một số bài toán hình học. Ngoài ra trình bày lại một số kết quả nghiên cứu gần đây của tác giả W. D Jiang [3], J. Liu [4] $-$ [6].

Bản luận văn "Về bất đẳng thức Erdos-Mordell" gồm có mở đầu, hai chương nội dung, kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1. Bất đẳng thức Erdos-Mordell. Chương này trình bày bất đẳng thức Erdos-Mordell cổ điển và trình bày lại một cách chứng minh mới cho bất đẳng thức này. Ngoài ra trong Chương 1 chúng tôi còn trình bày một số ví dụ liên quan. Các ví dụ này chủ yếu được trích ra từ các đề thi vô địch khu vực và đề thi IMO.

Chương 2. Một số mở rộng của bất đẳng thức Erdos-Mordell. Trong chương này chúng tôi trình bày một số bất đẳng thức mở rộng của bất đẳng thức Erdos-Mordell đối với tam giác: bất đẳng thức kiểu Erdos-Mordell có trọng số, hai bất đẳng thức cho một điểm trên mặt phẳng của một tam giác và bất đẳng thức hình học của Oppenheim.

Chương 1

Bất đẳng thức Erdos-Mordell

Trong chương này chúng tôi trình bày bất đẳng thức Erdos-Mordell cổ điển với một cách chứng minh mới của J. Liu và một vài ví dụ áp dụng. Nội dung chủ yếu được biên tập từ các tài liệu [1], [5], [7], [8], [9].

1.1 Bất đẳng thức Erdos-Mordell

Cho tam giác ABC và P là điểm nằm trong tam giác. Kí hiệu R_1, R_2, R_3 lần lượt là khoảng cách từ P đến các đỉnh A, B, C và r_1, r_2, r_3 lần lượt là khoảng cách từ P đến các cạnh BC, CA, AB. Kí hiệu a, b, c lần lượt là chiều dài của cạnh BC, CA, AB và h_a, h_b, h_c lần lượt là chiều cao của cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Với các kí hiệu trên ta có:

Định lý 1.1.1 *(Bất đẳng thức Erdos-Mordell) Cho tam giác ABC và P là điểm nằm trong tam giác. Khi đó luôn có bất đẳng thức*

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 2\big(r_1 + r_2 + r_3\big), \tag{1.1}$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều và P là trọng tâm của nó.

Bất đẳng thức (1.1) chứng minh đầu tiên thuộc về L.J.Mordell vào năm 1935, sau đó đã có nhiều tác giả đưa ra các chứng minh khác, nhiều trong số đó được dựa trên bất đẳng thức sau đây:

$$R_1 \geqslant \frac{cr_2 + br_3}{a}. \tag{1.2}$$

Ở đây chúng tôi xin trình bày một chứng minh mới mà không sử dụng bất đẳng thức (1.2) được đưa ra bởi J. Liu trong tài liệu [5]. Cách chứng minh được dựa trên bổ đề sau đây:

Bổ đề 1.1.2 *Với bất kỳ điểm P nằm trong tam giác ABC tùy ý, ta có*

$$\sqrt{a^2 + 4r_1^2} \geqslant \frac{cr_1 + ar_3}{b} + \frac{ar_2 + br_1}{c}. \tag{1.3}$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi và chỉ khi PO (O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC) song song với cạnh BC.

Chứng minh. Kí hiệu S là diện tích của tam giác ABC. Theo công thức Heron:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \tag{1.4}$$

trong đó $s = \frac{a+b+c}{2}$, ta dễ dàng nhận được

$$16S^2 = 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4. \tag{1.5}$$

Sử dụng đẳng thức (1.5) ta chứng minh được

$$\begin{aligned} a^2 &+ \frac{16x^2S^2}{(ax+by+cz)^2} - \frac{4S^2}{(ax+by+cz)^2}\left(\frac{cx+az}{b} + \frac{ay+bx}{c}\right)^2 \\ &= \frac{\left[\left(2b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 - b^4 - c^4\right)x - a\left(b^2+c^2-a^2\right)(yb+zc)\right]^2}{4b^2c^2(ax+by+cz)^2}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

trong đó x, y, z là các số thực và $ax + by + cz0$. Bởi vậy

$$a^2 + \frac{16x^2S^2}{(ax+by+cz)^2} - \frac{4S^2}{(ax+by+cz)^2}\left(\frac{cx+az}{b} + \frac{ay+bx}{c}\right)^2 \geqslant 0. \tag{1.7}$$

Đặt $x = r_1$, $y = r_2$, $z = r_3$ trong các bất đẳng thức trên, và sử dụng:

$$ar_1 + br_2 + cr_3 = 2S, \tag{1.8}$$

ta có

$$a^2 + 4{r_1}^2 \geqslant \left(\frac{cr_1 + ar_3}{b} + \frac{ar_2 + br_1}{c}\right)^2,$$

do đó bất đẳng thức (1.3) đúng. Rõ ràng, đẳng thức của bất đẳng thức (1.3) xảy ra khi và chỉ khi

$$\left(2b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 - b^4 - c^4\right) r_1 - a\left(b^2 + c^2 - a^2\right)(br_2 + cr_3) = 0. \tag{1.9}$$

Bây giờ chúng ta ký hiệu diện tích các tam giác BPC, CPA, APB lần lượt là S_a, S_b, S_c tương ứng, khi đó $S_a = \frac{1}{2}ar_1$, $S_b = \frac{1}{2}br_2$, $S_c = \frac{1}{2}cr_3$. Áp dụng (1.5), ta suy ra (1.9) tương đương với

$$S_a\left[16S^2 - a^2\left(b^2 + c^2 - a^2\right)\right] = a^2\left(b^2 + c^2 - a^2\right)(S_b + S_c). \tag{1.10}$$

Nếu $A = \frac{\pi}{2}$ và $r_1 = 0$ từ (1.9), P nằm trên BC và tâm đường tròn đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đồng thời là trung điểm của cạnh BC. Nếu $A \neq \frac{\pi}{2}$, thì $S_a \neq 0$ từ (1.10) ta có

$$\frac{16S^2 - a^2\left(b^2 + c^2 - a^2\right)}{a^2(b^2 + c^2 - a^2)} = \frac{S_b + S_c}{S_a},$$

sử dụng $S_a + S_b + S_c = S$, ta có

$$S_a = \frac{1}{16S}a^2\left(b^2 + c^2 - a^2\right) = \frac{1}{4}a^2\cot A = \frac{1}{2}R^2\sin 2A,$$

trong đó R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Nhưng $S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2}R^2\sin 2A$, vì thế $S_a = S_{\triangle BPC} = S_{\triangle BOC}$, do đó PO song song với BC. Bổ đề 1.1.2 được chứng minh. $\square$

Chứng minh Định lý 1.1.1 Theo Bổ đề 1.1.2, ta có

$$\sqrt{b^2 + 4r_2^2} \geqslant \frac{ar_2 + br_1}{c} + \frac{br_3 + cr_1}{a}, \tag{1.11}$$

$$\sqrt{c^2 + 4r_3^2} \geqslant \frac{br_3 + cr_2}{a} + \frac{cr_1 + ar_3}{b}. \tag{1.12}$$

Sử dụng $2S = ah_a$ và công thức Heron chúng ta có được

$$h_a = \frac{1}{2a}\sqrt{\left[(b+c)^2 - a^2\right]\left[a^2 - (b - c)^2\right]} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{(b+c)^2 - a^2},$$

do đó ta có

$$b + c \geqslant \sqrt{a^2 + 4h_a^2}, \tag{1.13}$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = c$.

Áp dụng bất đẳng thức (1.13) với tam giác PBC, ta có

$$R_2 + R_3 \geqslant \sqrt{a^2 + 4r_1^2}, \tag{1.14}$$

và hai dạng tương tự. Cộng các bất đẳng thức đó ta có:

$$2(R_1 + R_2 + R_3) \geqslant \sqrt{a^2 + 4r_1^2} + \sqrt{b^2 + 4r_2^2} + \sqrt{c^2 + 4r_3^2}, \tag{1.15}$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Mặt khác, cộng các bất đẳng thức (1.3), (1.11) và (1.12) ta có:

$$\begin{aligned} &\sqrt{a^2 + 4r_1^2} + \sqrt{b^2 + 4r_2^2} + \sqrt{c^2 + 4r_3^2} \\ &\geqslant 2\left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) r_1 + 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) r_2 + 2\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) r_3, \end{aligned} \tag{1.16}$$

đẳng thức xảy ra giống như bất đẳng thức (1.15). Vì

$$\frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geqslant 2,\ \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 2,\ \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geqslant 2,$$

do đó từ bất đẳng thức (1.15) và (1.16), thu được bất đẳng thức Erdos-Mordell và đẳng thức xảy ra trong (1.1) khi $a = b = c$ và P là trọng tâm. Định lý 1.1.1 được chứng minh. □

1.2 Một số ví dụ liên quan

Ví dụ 1.2.1 *Cho tam giác ABC và P là một điểm tùy ý nằm trong tam giác. Khi đó*

$$2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \leqslant \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}. \tag{1.17}$$

Giải

Xét phép nghịch đảo N cực P và phương tích $d = r_2$

$$\begin{aligned} N\ : A \to A';\ B \to B';\ C \to C', \\ A_1 \to A_1';\ B_1 \to B_1';\ C_1 \to C_1'. \end{aligned}$$

Khi đó, ta có